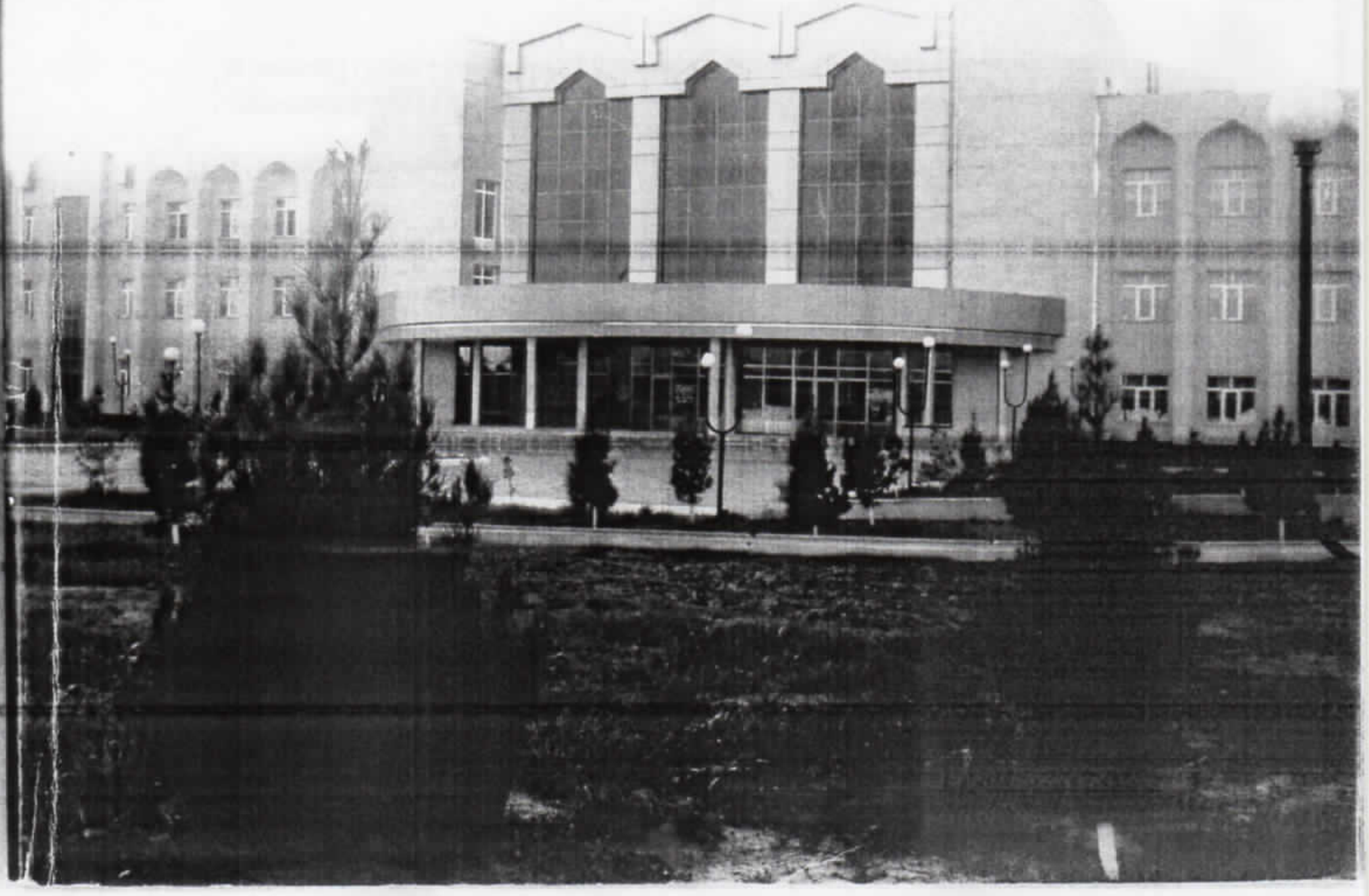
Қарши ДУ АХБОРОТНОМАСИ

1
2010



тенгламанинг ечими бўлиши кўрсатилган. Критик ГВП назарияси асосий леммасининг дифференциал аналоги исботланиб, унинг классик лимит теоремаларни Стейн-Тихомиров усули билан исботлашдаги кўлланилиш имкониятлари Яглом теоремаси мисолида таҳлил этилган.

RESUME

In this paper an asymptotical behaviors of stationary measures of Lamperti-Ney stochastic branching processes model are investigated. This model is called as Q-processes in the literature. In the case when the classical Galton-Watson processes (ГВП) are critical we prove that the generating functions of the stationary measures of Q-processes satisfy the Abel type functional equation: The differential analog of the basic lemma of the theory of critical ГВП is proved and its possibility of application in proofs of the classical limit theorems by the Stein-Tikhomirov method in example of the Yaglom theorem is shown.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Абулов М.О., канд. физ.-мат. наук (КарГУ)

В области $D=\{(x,t)-1<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_t - \mu(x)u_{xxx} - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + |u|^{\rho} u = f(x,t) \qquad (1)$$

где, $x\mu(x)>0, \mu(0)=0, \rho \geq 0$, $f(x,t)$ -заданная функция.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемые функции.

Нелокальная задача: Найти в области D решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{t=T}, \quad u\big|_{x=-1} = u\big|_{x=1} = 0. \qquad (2)$$

В работе [1] для уравнения (1) рассматривалась локальная краевая задача.

Обозначим $H(D)$ пространство функций, полученное замыканием функций из $C^3(Q)$, удовлетворяющих условиям (2) по норме

$$\|u\|^2_{H(D)} = \int_D (\mu^2 u^2_{xxx} + u^2_{xx} + u_t^{\,2} + u_x^{\,2} + u^2)\,dD \qquad (3)$$

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены условия

$$a(x,t) - \frac{3}{2}|\mu'(x)| \geq \delta \succ 0, c(x,t) - \frac{b_x}{2} + \frac{\mu_{xxx}}{2} - \frac{a_{xx}}{2} \geq \delta_1 \succ 0, \qquad (4)$$

$a(x,0)=a(x,T)$, $b(x,0)=b(x,T)$, $c(x,0)=c(x,T)$ и функция $f(x,t)$ такова, что $f(x,t),\ f_t(x,t) \in L_2(Q),\ f(x,0)=f(x,T)$. Тогда существует единственное решение задачи (1),(2) в $H(D)$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j(x)\}$ -базис пространства $W_2^2(-1,1) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(-1,1)$, составленный из собственных функций задачи

$$-\varphi_i'' = \lambda_i \varphi_i, \varphi_i\big|_{x=-1} = \varphi_i\big|_{x=1} = 0 \qquad (5)$$

Приближенные решения задачи (1),(2) будем искать в виде. Галёркинских приближений

$$u^m(x,t) = \sum_{k+j=1}^{m} c_{jk}^m g_k(t)\varphi_j(x) \tag{6}$$

где,

$$g_0(t) = 1, g_{2l-1}(t) = \sin\frac{2\pi l}{T}t, g_{2l}(t) = \cos\frac{2\pi l}{T}t.$$

Постоянные c_{jk}^m определим из алгебраической системы уравнений

$$\int_D g_k\varphi_j Lu^m dD = \int_D g_k\varphi_j f dD,\ k+j = 1,2,...m. \tag{7}$$

Дале, через с и будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от m.

Получим равномерные по m оценки для Галеркинских приближений. (6) Для этого умножим (7) на c_{jk}^m и суммируя по k+j получим

$$\int_D (u_t^m - \mu u_{xxx}^m - au_{xx}^m + bu_x^m + cu^m + |u^m|^\rho u^m)u^m dD = \int_D fu^m dD \tag{8}$$

Из (8), интегрируя по частям в силу условий теоремы, получим

$$\int_D [(u^m)^2 + (u_x^m)^2 + |u|^{\rho+2}]dD \le c\int_D f^2 dD \tag{9}$$

По лемме Вишика [3],из (9) следует разрешимость алгебраической системы (7).

Далее из (7) получим следующее равенство

$$\int_D (u_t^m - \mu u_{xxx}^m - au_{xx}^m + |u^m|^\rho u^m)(-u_{xx}^m)dD = \int_D (f - bu_x^m - cu^m)(-u_{xx}^m)dD \tag{10}$$

Из этого равенства, интегрируя по частям и используя оценку (9), получим

$$\int_D [(u_{xx}^m)^2 + (u_x^m)^2 + (|u^m|^{\frac{\rho}{2}} u^m)_x^2]dD \le c\int_D f^2 dD \tag{11}$$

Нетрудно видеть, в силу условии теоремы из уравнения (1) следует что,

$$u_t\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=T} \tag{12}$$

Далее рассмотрим следующий интеграл

$$\int_D (u_{tt}^m - \mu u_{xxxt}^m - au_{xxt}^m + bu_{xt}^m + cu_t^m + (\rho+1)|u^m|^\rho u_t^m)u_t^m dD = \int_D (f_t - a_t u_{xx}^m - b_t u_x^m - c_t u^m)u_t dD \tag{13}$$

Из (13), интегрируя по частям в силу условий теоремы, а также оценки (9), (11) получим

$$\int_D [(u_{xt}^m)^2 + (u_t^m)^2 + (|u^m|^{\frac{\rho}{2}} u^m)_t^2]dD \le C\int_D (f^2 + f_t^2)dD \tag{14}$$

Из уравнения (7) в силу оценок (9), (11), (14) имеем.

$$\mu(x)u_{xxx}^m \in L_2(D) \tag{15}$$

Из оценок (9), (11), (14), (15) следует ограниченность последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ в пространстве $H(D)$. Поскольку все производные, входящие в уравнение (7) квадратично суммируемы по области D, можно выбрать подпоследовательность $\{u^{m_k}\}$ и перейти к пределу по $m_k \to \infty$ в системе (7), Нетрудно проверить, что предельная функция принадлежит пространству $H(D)$. Поскольку система $\{g_k(t)\varphi_j(x)\}$ плотна $L_2(D)$, поступая аналогично, легко доказать что предельная функция $u(x,t)$, удовлетворяет уравнению (1) п.в.в D.

Тем самым существование решения задачи (1), (2) доказано. Докажем, теперь единственность этого решения. Если u,v есть решения задачи (1), (2) то $w = u - v$ удовлетворяет уравнению

$$w_t - \mu w_{xxx} - a w_{xx} + b w_x + c w + |u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v = 0 \qquad (16)$$

Рассмотрим следующий интеграл $\int_D (w_t - \mu w_{xxx} - a w_{xx} + b w_x + c w + |u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dD = 0$

и интегрируя его по частям, получим

$$\int_D (w^2 + w_x^2) dD + \int_{\partial D} \frac{\mu(x)}{2} w_x^2 dS + \int_D (|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v)(u - v) dD = 0 \qquad (17)$$

В силу монотонности [2].

$$\int_D (|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v)(u - v) dD \geq 0 \qquad (18)$$

По условию на $\mu(x)$ имеем.

$$\int_{\partial D} \frac{\mu(x)}{2} w_x^2 dS \geq o \qquad (19)$$

Тогда в силу (18), (19) из (17) следует что $\int_D (w^2 + w_x^2) dD \leq 0$. Откуда следует, что $w = 0$ в D. Теорема доказана .

Литература

1. Гатабон В. Д. Краевая задача для одного класса уравнений нечетного порядка . Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -Новосибрск, 1984. С 179-182.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир, 1972. С. 588
3. Ларкин Н. А. и др. Нелинейные уравнения переменного типа -Новосибирск, 1983. С. 272.
4. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ. 1983. С. 82.

РЕЗЮМЕ

Ушбу маколада чизикли бўлмаган учинчи тартибли битта тенгламага кўйилган нолокал масаланинг ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги кўрсатилган.

RESUME

In the article, existence and uniqueness of the solution to a nonlocal boundary problem for a partial differensial equation of the third order are proved.

МУНДАРИЖА

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

БИОЛОГИЯ

ХИМИЯ

ТЕХНИКА ФАНЛАРИ

ИҚТИСОДИЁТ

ФАЛСАФА